Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 5

Problema 1. Se lanza desde el infinito una partícula de masa m y carga $q > 0$ hacia un anillo cargado con densidad de carga lineal $\lambda > 0$ y radio R. Determine la mínima velocidad con la que debe ser lanzada la partícula a través del eje de simetría del anillo para que lo atraviese por el centro.

Hay dos maneras principales de resolver el problema, el primero es por dinámica por medio de la segunda ley de Newton y el segundo es por conservación de la energía. Como el segundo es más rápido y abarca temas de la clase lo resolveremos por dicho método.

Primero hay que tener en cuenta varios elementos: Que trabajo se asocia a un cambio de energía $W = \Delta U$, que $\vec{F} = q\vec{E}$ en el caso de la electrostática y por la definición de trabajo tenemos:

$$\Delta U = W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{r} = q\Delta V$$

Y llegamos a la útil relación entre diferencia de potencial eléctrico y diferencia de energía potencial eléctrica

$$\Delta U = q\Delta V$$

Calculemos entonces la diferencia de potencial ΔV considerando que el campo eléctrico sobre el eje de simetría de un anillo con densidad de carga lineal λ es $\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{k}$

$$\Delta V = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dz = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$

Por lo que la diferencia de energía potencial entre la partícula en el centro del anillo y la partícula en el infinito es:

$$\Delta U = q\Delta V = \frac{q\lambda}{2\varepsilon_0}$$

Como queremos que al menos la partícula llegue al centro, transformamos toda esa energía potencial eléctrica en energía cinética:

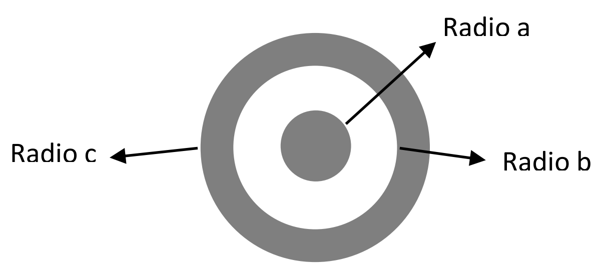
$$\frac{q\lambda}{2\varepsilon_0} = \Delta U = \Delta K = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{q\lambda}{m\varepsilon_0}}$$

Esa velocidad es la necesaria para que la partícula quede estática en el centro del anillo, pero como queremos que lo atraviese:

$$v > \sqrt{\frac{q\lambda}{m\varepsilon_0}}$$

Problema 2. Una esfera conductora de radio a se encuentra en el interior (y es concéntrica) de un cascarón esférico conductor de radio interior b y radio exterior c. La esfera interior se encuentra a potencial V_1 y el cascarón a potencial V_2.

(a) Calcule la carga total que tiene la esfera de radio a.
(b) Calcule la densidad de carga en la parte exterior del cascarón.
(c) Calcule el potencial en todo el espacio.
Si la esfera se conecta a tierra.
(d) ¿Cuánto valdrá el potencial en $r > c$?
(e) ¿Qué carga total tendrá el cascarón esférico?



(a) Para calcular la carga, primero calculamos el campo eléctrico con gauss entre a y b.
Como la carga se distribuirá homogéneamente sobre la esfera conductora y por la simetría esférica del problema podemos decir que el módulo del campo eléctrico será constante en una superficie esférica concéntrica a la esfera

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi E r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Luego relacionamos ese campo eléctrico con el potencial

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot \hat{r}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{Q(a-b)}{4\pi\varepsilon_0 ab}$$

Despejamos Q

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab(V_2 - V_1)}{a - b}$$

(b) Para calcular la densidad de carga en la parte exterior del cascarón esférico primero hay que tener varias cosas en consideración:

Como el campo eléctrico dentro del cascarón esférico es $\vec{0}$ (por ser un conductor) por gauss se deduce que la carga en la superficie interior del cascaron es $-Q$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 = \frac{Q - Q}{\varepsilon_0}$$

Volvemos a usar gauss, pero esta vez para la región exterior al cascarón:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q - Q + Q_c}{\varepsilon_0} = 4\pi E r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Luego calculamos la diferencia de potencial entre infinito (V_∞) y la superficie de radio c

$$\Delta V = V_2 - V_\infty = V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_c^\infty \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot \hat{r}\, dr = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

Despejamos Q_c y la dividimos en el área de la superficie del cascarón con radio c ($4\pi c^2$)

$$Q_c = 4\pi\varepsilon_0 c V_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\varepsilon_0 V_2}{c}$$

(c) El potencial para $r > c$

$$\Delta V = V_2 - V_\infty = V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{r} \cdot \hat{r}\, dr' = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{cV_2}{r}$$

El potencial en el espacio entre los conductores $a < r < b$

$$\Delta V = V_r - V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot \hat{r}\, dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) = \frac{a(V_2 - V_1)(b - r)}{(a - b)r}$$

Despejamos V_r

$$V_r = V_2 + \frac{a(V_2 - V_1)(b - r)}{(a - b)r}$$

Para $r < a$ tenemos V_1

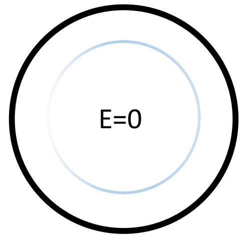
Para $b < r < c$ tenemos V_2

(d) Miremos el potencial para $r > c$ del inciso anterior, y para este caso $V_1 = 0$ (ya que la esfera se conecta a tierra)

$$V_r = V_2 + \frac{a(V_2 - V_1)(b - r)}{(a - b)r} = V_2\left(1 + \frac{a(b - r)}{(a - b)r}\right)$$

(e) Si el cascarón esférico no se toca, la carga no va a cambiar.

Problema 3. Demuestre que dentro de un cascarón esférico con carga uniformemente distribuida y radio R, el campo eléctrico es 0.



Para demostrar esto usaremos la ley de gauss y la simetría del problema.
En la integral de gauss consideraremos una superficie esférica concéntrica a la esfera cargada. Por simetría puedo suponer que el campo eléctrico es paralelo a la superficie en todo punto. Por otro lado, la carga encerrada es 0.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = 4\pi E r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{0} \quad \forall r < R$$